

Algebra I - Zusammenfassung

Patrick Pletscher

18. Oktober 2003

1. Lineare Gleichungssysteme - Gauss-Elimination

Ein lineares Gleichungssystem heisst **homogen**, falls die rechte Seite aus Nullen besteht. Andernfalls heisst es inhomogen. Die Lösung $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ eines Systems heisst **triviale** Lösung.

n: Anzahl Unbekannter, m: Anzahl Gleichungen, r: Zahl bei der Gaußalgorithmus abbricht = Rang des Systems

Ein homogenes Gleichungssystem hat genau dann nichttriviale Lösungen, wenn $r < n$ ist. Dann gibt es eine $(n-r)$ -parametrische Lösungsschar. Insbesondere hat ein homogenes System mit $m < n$, d.h mit mehr Unbekannten als Gleichungen, stets eine mindestens $(n-m)$ -parametrische Schar nichttrivialer Lösungen.

Falls $r := \text{Rang } A = n$, dann ist A **regulär**, falls $r := \text{Rang } A < n$, dann ist A **singulär**.

2. Matrizen und Vektoren in \mathbb{R}^n und \mathbb{C}^n

2.1. Das Rechnen mit Matrizen und Vektoren

Eine $m \times n$ - Matrix A kann mit einer $n \times p$ - Matrix B **multipliziert** werden.

Das Element $(AB)_{ij}$ in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte von AB bekommt man also, indem man die i-te Zeile der Matrix A mit der j-ten Kolonne der Matrix B multipliziert, wobei man die Zeile als Zeilenvektor auffasst und die Kolonne als Spaltenvektor.

Ist A eine $m \times n$ - Matrix und $B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_p)$ eine $n \times p$ - Matrix, so gilt:
 $AB = (Ab_1 \ Ab_2 \ \dots \ Ab_p)$

Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau dann eine Lösung, wenn b eine Linearkombination der Kolonnen von A ist.

2.2. Die Transponierte einer Matrix; symmetrische und Hermitesche Matrizen

Definition:

Ist A eine $m \times n$ - Matrix, so heisst die $n \times m$ - Matrix A^T mit $(A^T)_{ij} := (A)_{ji}$ die zu A **transponierte** Matrix.

Ist A eine komplexe Matrix, so ist \bar{A} mit $(\bar{A})_{ij} := \overline{(A)_{ij}}$ die zu A konjugiert-komplexe Matrix, und $A^H := (\bar{A})^T = \overline{A^T}$ ist die zu A konjugiert-transponierte oder Hermitesch-transponierte Matrix.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$
$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix A heisst **symmetrisch**, falls $A^T = A$, eine Matrix heisst **Hermitesch**, falls $A^H = A$

Für das Transponieren (auch für A^H) gelten folgende Rechenregeln:

$$(A^T)^T = A$$
$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$
$$(A + B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$

Für beliebige quadratische Matrizen gilt:
A, B symmetrisch, $AB = BA \rightarrow AB$ symmetrisch
A, B Hermitesch, $AB = BA \rightarrow AB$ Hermitesch

Für beliebige Matrizen gilt:
 $A^T A$ und AA^T sind symmetrisch
 $A^H A$ und AA^H sind Hermitesch

2.3. Das Skalarprodukt und die Norm von Vektoren; Längen und Winkel

Definition:
Das (Euklidische) **Skalarprodukt** oder **innere Produkt** zweier Vektoren $x, y \in \mathbb{E}^n$ ist die Zahl $\langle x, y \rangle$ definiert durch:
 $\langle x, y \rangle := x^H y = \sum_{k=1}^n \bar{x}_k y_k$

Die **Länge** oder 2-Norm oder Euklidische **Norm** eines Vektors $x \in \mathbb{E}^n$ ist die nichtnegative reelle Zahl $\|x\|$ definiert durch $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$

Es gilt die **Schwarzsche Ungleichung**:
 $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$

$$\cos \phi = \frac{\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

2.4. Das äussere Produkt und die orthogonale Projektion auf eine Gerade

Das dyadische Produkt oder **äussere Produkt** eines m-Vektors x und eines n-Vektors y ist die $m \times n$ -Matrix xy^H .

Die orthogonale **Projektion** $P_y x$ des n-Vektors x auf die durch die Vielfachen von y ($\neq 0$) erzeugte Gerade durch den Ursprung ist gegeben durch
 $P_y x := \frac{1}{\|y\|^2} y y^H x$

2.5. Die Inverse einer Matrix

Eine $n \times n$ Matrix A heisst invertierbar, falls es eine $n \times n$ -Matrix X gibt, so dass $AX = I_n = XA$ ist. Die Matrix X heisst Inverse von A und wird mit A^{-1} bezeichnet: $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.
Falls A regulär ist, dann ist A auch invertierbar.

Ist A regulär, so hat das Gleichungssystem $Ax=b$ für jede rechte Seite b eine eindeutige Lösung, und zwar ist $x = A^{-1}b$

2.6. Orthogonale und unitäre Matrizen

Eine $n \times n$ -Matrix A heisst **unitär**, falls $A^H A = I_n$. Eine reelle unitäre Matrix heisst auch **orthogonal**; für sie gilt $A^T A = I_n$.

Sind A und B unitäre $n \times n$ -Matrizen, so gilt:
- A ist regulär und $A^{-1} = A^H$
- $AA^H = I_n$
- A^{-1} ist unitär - AB ist unitär

Householder-Matrizen

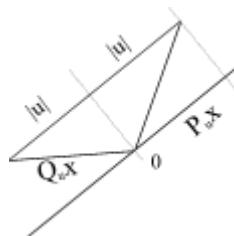
Spezielle Klasse orthogonaler Matrizen. Sie beschreiben die Spiegelung an einer Hyperebene, d.h. einer Geraden, falls $n=2$, und an einer Ebene, wenn $n=3$.
Es sei u ein reeller Kolonnenvektor der Länge 1, d.h. $u^T u = 1$. Dann ist das äussere Produkt uu^T ja die $n \times n$ -Matrix. Die zu u gehörende Householder-Matrix ist

$$Q_u := I - 2uu^T$$

Sie lässt sich durch die Projektion auf die Richtung u ausdrücken (wobei jetzt u reell und $\|u\| = 1$ ist):

$$Q_u = I - 2P_u, \text{ wo } P_u = uu^T$$

P_u und damit auch Q_u symmetrisch.



Die durch eine orthogonale oder unitäre $n \times n$ Matrix A definierte Abbildung ist längen- und winkeltreu.

3. Die LR-Zerlegung

3.1. Die Gauss-Elimination als LR-Zerlegung

$$A = LR$$

Durch die Gauss-Elimination wird also die Koeffizientenmatrix A eines linearen Gleichungssystems implizit in ein Produkt einer Linksdreiecksmatrix L und einer Rechtsdreiecksmatrix R zerlegt. Man nennt deshalb diesen Hauptteil der Gauss-Elimination auch LR-Zerlegung.

Zeilenweise, direkte LR-Zerlegung, regulärer Fall

Zur LR-Zerlegung einer regulären Matrix A berechne man für $i=1, \dots, n$, mit $l_{ii} := 1$,
 $l_{ik} := (a_{ik} - \sum_{j=1}^{k-1} l_{ij}r_{jk}) \frac{1}{r_{kk}}$ ($k = 1, \dots, i-1$),
 $r_{ik} := (a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}r_{jk}) \frac{1}{l_{ii}}$ ($k = i, \dots, n$).

Danach:

- Vorwärtseinsetzen: $Lc=b$ auflösen nach c .
- Rückwärtseinsetzen: $Rx=c$ auflösen nach x .

3.2. Die Cholesky-Zerlegung

$$A = \tilde{R}^H \tilde{R}$$

Eine reelle $n \times n$ Matrix, heisst **positiv definit**, wenn:
 $x^H Ax > 0 \quad x \in \mathbb{R}^n$

Zeilenweise, direkte Cholesky-Zerlegung:

Zur Cholesky-Zerlegung einer positiv definiten reell symmetrischen oder Hermitschen $n \times n$ Matrix A berechne man für $i=1, \dots, n$:

$$\tilde{r}_{ii} := \sqrt{a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} |\tilde{r}_{ji}|^2},$$

$$\tilde{r}_{ik} := (a_{ik} - \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{r}_{ji} \tilde{r}_{jk}) \frac{1}{\tilde{r}_{ii}} \quad (k = i+1, \dots, n).$$

Dabei sind die Summen leer, wenn $i=1$ ist. Im letzten Schritt mit $i=n$ entfällt die zweite Formel.

Danach:

- Vorwärtseinsetzen: $\tilde{R}^H c = b$ auflösen nach c .
- Rückwärtseinsetzen: $\tilde{R}x = c$ auflösen nach x .

4. Vektorräume

4.1. Definition

Ein Vektorraum V über \mathbb{E} ist eine nichtleere Menge auf der eine **Addition**

$$x, y \in V \mapsto x + y \in V$$

und eine **skalare Multiplikation**

$$\alpha \in \mathbb{E}, x \in V \mapsto \alpha x \in V$$

definiert sind, wobei folgende Grundregeln gelten:

$$(V1) \quad x + y = y + x$$

$$(V2) \quad (x + y) + z = x + (y + z)$$

$$(V3) \quad \text{es gibt ein ausgezeichnetes Element } o \in V \text{ mit } x + o = x$$

$$(V4) \quad \text{zu jedem } x \in V \text{ gibt es ein eindeutig bestimmtes } -x \in V \text{ mit } x + (-x) = o$$

$$(V5) \quad \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$$

$$(V6) \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$$

$$(V7) \quad (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$$

$$(V8) \quad 1x = x$$

4.2. Unterräume, Erzeugendensysteme

Eine nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V heisst **Unterraum**, falls sie bezüglich Addition und skalarer Multiplikation abgeschlossen ist.

Ein Unterraum ist selbst ein Vektorraum.

Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{E} , und es seien $a_1, \dots, a_n \in V$ ausgewählte Vektoren. Ein Vektor der Form $x := \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_n a_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{E}$ heisst eine **Linearkombination** von a_1, \dots, a_n .

Die Menge aller Linearkombinationen von a_1, \dots, a_n heisst der von a_1, \dots, a_n aufgespannte/erzeugte Unterraum. Er wird bezeichnet mit $span\{a_1, \dots, a_n\}$

4.3. Lineare Abhängigkeit, Basen, Dimension

Die $n \geq 2$ Vektoren a_1, \dots, a_n sind **linear abhängig** genau dann, wenn sich einer dieser Vektoren als Linearkombination der andern schreiben lässt.

Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Vektorraums V heisst **Basis** von V .

$b_1, \dots, b_m \subset V$ ist genau dann eine Basis von V , wenn sich jeder Vektor $x \in V$ in eindeutiger Weise als Linearkombination von b_1, \dots, b_m darstellen lässt. $x = \sum_{k=1}^m \xi_k b_k$

Testen auf lin. Abhängigkeit: $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$

4.4. Basiswechsel, Koordinatentransformation

Es sei b_1, \dots, b_n eine vorgegebene, alte Basis des Vektorraumes V , und es sei b'_1, \dots, b'_n eine zweite, neue Basis von V . Die neuen Basisvektoren kann man in der alten Basis darstellen: $b'_k = \sum_{i=1}^n \tau_{ik} b_i$ ($k = 1, \dots, n$)

Die $n \times n$ -Matrix $T = (\tau_{ik})$ heisst **Transformationsmatrix** des Basiswechsels.

$$\begin{array}{ccc} & T^{-1} & \\ \xi & \begin{array}{c} \rightarrow \\ \leftarrow \end{array} & \xi' \\ & T & \end{array}$$

Es sei $\xi = (\xi_1 \dots \xi_n)^T$ der Koordinatenvektor eines beliebigen Vektors $x \in V$ bezüglich der alten Basis, und es sei $\xi' = (\xi'_1 \dots \xi'_n)^T$ der Koordinatenvektor dieses Vektors x bezüglich einer neuen, gegebenen Basis, so dass

$$\sum_{k=1}^n \xi_k b_k = x = \sum_{k=1}^n \xi'_k b'_k$$

Dann gilt für die Koordinatentransformation: $\xi_i = \sum_{k=1}^n \tau_{ik} \xi'_k$ ($i = 1, \dots, n$)
d.h. es ist $\xi = T\xi'$

wobei die Transformationsmatrix T regulär ist, so dass also
 $\xi' = T^{-1}\xi$

5. Lineare Abbildungen

5.1. Definition, Matrixdarstellung

Eine Abbildung $F : X \rightarrow Y, x \mapsto Fx$ zwischen zwei Vektorräumen X und Y (über \mathbb{E} heißt **linear**, wenn für alle $x, \tilde{x} \in X$ und alle $\gamma \in \mathbb{E}$ gilt

$$F(x + \tilde{x}) = Fx + F(\tilde{x}), \quad F(\gamma x) = \gamma(Fx)$$

X ist der Definitionsraum, Y der Bildraum der Abbildung.

Wir betrachten nun eine beliebige lineare Abbildung F eines n -dimensionalen Vektorraums X in einen m -dimensionalen Vektorraum Y . Es sei b_1, \dots, b_n eine Basis von X , c_1, \dots, c_m eine Basis von Y .

Die Bilder $Fb_l \in Y$ der Basis von X lassen sich als Linearkombinationen der c_k darstellen:

$$Fb_l = \sum_{k=1}^m a_{kl} c_k \quad (l = 1, \dots, n)$$

Die $m \times n$ -Matrix $A = (a_{kl})$ heißt Abbildungsmatrix von F bezüglich den gegebenen Basen in X und Y .

$x \in X$:

$$x = \sum_{l=1}^n \xi_l b_l$$

mit dem Koordinatenvektor $\xi := (\xi_1 \dots \xi_n)^T$.

$y \in Y$:

$$y = \sum_{k=1}^m \eta_k c_k$$

mit dem Koordinatenvektor $\eta := (\eta_1 \dots \eta_m)^T$.

somit gilt: $\eta = A\xi$.

Eine eindeutige Abbildung von X auf Y heißt Isomorphismus.

Ist $F : X \rightarrow Y$ ein **Isomorphismus**, so ist die inverse Abbildung $F^{-1} : Y \rightarrow X$ linear und auch ein Isomorphismus.

5.2. Kern, Bild und Rang

Der Kern $\ker F$ von F ist das Urbild von $o \in Y$. Das Bild $\text{im } F$ von F ist das Bild des Definitionsraumes X .

$\ker F$ ist ein Unterraum von X ($Ax = o$), und $\text{im } F$ ist ein Unterraum von Y .

F ist genau dann injektiv, wenn $\ker F = o$ ist

Es gilt die **Dimensionsformel**

$$\dim X - \dim \ker F = \dim \text{im } F$$

Der Rang einer linearen Abbildung F ist gleich der Dimension des Bildes von F :

$$\text{Rang } F := \dim \text{im } F$$

5.3. Matrizen als lineare Abbildung

$$A = (a_1 a_2 \dots a_n)$$

Der von den Spalten von A aufgespannte Unterraum $\mathcal{R}(A) := \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ heißt Spaltenraum oder Wertebereich von A . Der Lösungsraum \mathcal{L}_0 des homogenen Systems $Ax=0$ heißt Nullraum $\mathcal{N}(A)$.

Fasst man die Matrix A als lineare Abbildung auf, so ist das Bild von A gleich dem Spaltenraum oder Wertebereich von A , und der Kern von A ist gleich dem Nullraum von A :

$$\text{im } A = \mathcal{R}(A), \quad \ker A = \mathcal{N}(A).$$

Das Gleichungssystem $Ax=b$ ist genau dann lösbar, wenn b im Spaltenraum von A liegt. Eine allfällige Lösung ist genau dann eindeutig, wenn $\mathcal{N}(A)=0$ ist, das heißt das homogene System nur die triviale Lösung hat.

Bezeichnet r den Rang der Matrix A und \mathcal{L}_0 den Lösungsraum von $Ax=0$, so ist

$$\dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{N}(A) = \dim \ker A = n-r$$

Der Rang einer $m \times n$ Matrix A ist gleich

- (1) der Anzahl Pivotelemente bei der Reduktion von A auf Zeilenstufenform.
- (2) dem Rang der linearen Abbildung $A: \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^m$, definiert als $\dim \text{im } A$

- (3) der Dimension des Spaltenraums (Spaltenrang), definiert als Anzahl linear unabhängiger Spalten ($\in \mathbb{E}^n$)
- (4) der Dimension des Zeilenraums (Zeilenrang), definiert als Anzahl linear unabhängiger Zeilen ($\in \mathbb{E}^n$).

5.4. Die Abbildungsmatrix bei Koordinatentransformation

$$\begin{array}{ccc} \xi \in \mathbb{E}^n & A & \eta \in \mathbb{E}^m \\ T^{-1} \downarrow \uparrow T & & S^{-1} \downarrow \uparrow S \text{ (Koordinatentrans.)} \\ \xi' \in \mathbb{E}^n & B & \eta' \in \mathbb{E}^m \end{array}$$

$$B = S^{-1}AT, \quad A = SBT^{-1}$$

6. Vektorräume mit Skalarprodukt

6.1. Vektorräume mit Skalarprodukt

Die Norm oder Länge eines Vektors x in einem Vektorraum V mit Skalarprodukt ist

$$\|x\| \equiv \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren x und y ist gegeben durch

$$\varphi = \angle(x, y) \equiv \arccos \frac{\operatorname{Re} \langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Satz von Pythagoras

In einem Vektorraum mit Skalarprodukt gilt:

$$x \perp y \Rightarrow \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

6.2. Orthonormalbasen

Ist V ein n -dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und b_1, \dots, b_n eine Orthonormalbasis, so gilt für jedes $x \in V$

$$x = \sum_{k=1}^n \langle b_k, x \rangle b_k$$

Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren

Es sei a_1, a_2, \dots eine endliche oder abzählbare, linear unabhängige Menge von Vektoren. Wir berechnen eine gleich grosse Menge b_1, b_2, \dots von normierten und paarweise orthogonalen Vektoren rekursiv gemäss.

$$\begin{aligned} b_1 &\equiv \frac{a_1}{\|a_1\|}, \\ \tilde{b}_k &\equiv a_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle b_j, a_k \rangle b_j, \\ b_k &\equiv \frac{\tilde{b}_k}{\|\tilde{b}_k\|} \end{aligned}$$

6.3. Orthogonale und unitäre Basiswechsel und Koordinatentransformationen

Die Transformationsmatrix einer Basistransformation zwischen orthonormierten Basen ist unitär ($I = T^H T$). Dadurch sind die alten und neuen Koordinatenvektoren ξ und ξ' verknüpft gemäss:

$$\xi = T\xi', \quad \xi' = T^H \xi$$

6.4. Orthogonale und unitäre Abbildungen

Es seien X und Y zwei unitäre (bzw. orthogonale) Vektorräume. Eine lineare Abbildung $F: X \rightarrow Y$ heisst unitär (bzw. orthogonal), falls für $x, y \in X$ gilt:

$$\langle Fx, Fy \rangle_Y = \langle x, y \rangle_X$$

Eine solche Abbildung ist längen- und winkeltreu, zusätzlich ist $\ker F = 0$, d.h. F ist injektiv.

6.5. Normen von linearen Abbildungen (Operatoren) und Matrizen

X und Y zwei normierte Vektorräume. Eine lineare Abbildung $F: X \rightarrow Y$ heisst beschränkt, wenn es ein $\gamma_F \geq 0$ gibt mit $\|F(x)\|_Y \leq \gamma_F \|x\|_X$ ($\forall x \in X$)

7. Die Methode der kleinsten Quadrate und die QR-Zerlegung einer Matrix

7.1. Orthogonalprojektionen

Eine lineare Abbildung $P : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^m$ heisst Projektion oder Projektor, falls $P^2 = P$

Eine Projektion heisst Orthogonalprojektion oder orthogonaler Projektor, falls zusätzlich gilt $\ker P \perp \operatorname{im} P$.

Ist P ein Projektor, so ist auch $I-P$ ein Projektor und es gilt:

$$\operatorname{im}(I-P) = \ker P, \quad \ker(I-P) = \operatorname{im} P$$

Für einen Projektor $P : \mathbb{E}^m \rightarrow \mathbb{E}^m$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- P ist ein orthogonaler Projektor
- $I - P$ ist ein orthogonaler Projektor
- $P^H = P$

Sind die Spalten einer $m \times n$ -Matrix A linear unabhängig, d.h. ist $\operatorname{Rang} A = n$ ($\leq m$), so ist $A^H A$ regulär.

Die Orthogonalprojektion $P_A : \mathbb{E}^m \rightarrow \operatorname{im} A \subseteq \mathbb{E}^m$ auf den Spaltenraum $\mathcal{R}(A) = \operatorname{im} A$ einer $m \times n$ -Matrix A mit $\operatorname{Rang} n$ ($\leq m$) ist gegeben durch

$$P_A \equiv A(A^H A)^{-1} A^H$$

also $P_A y$

$$P_A y = A(A^H A)^{-1} A^H y$$

wenn Kolonnen von Q orthogonal

$$P_Q \equiv Q Q^H$$

7.2. Die Methode der kleinsten Quadrate

Überbestimmtes lineares Gleichungssystem $Ax=y$ mit einer "hohen" $m \times n$ -Matrix ($m > n$). Hat im allgemeinen keine Lösungen.

Wenn keine Lösung, dann x so wählen, dass Residuenvektor ($r \equiv y - Ax$) minimale Euklidische Norm hat:

$$\|r\|^2 = \sum_{k=1}^m r_k^2$$

$$x = (A^H A)^{-1} A^H y \text{ oder } A^T A \vec{x} = A^T \vec{y}$$

7.3. Die QR-Zerlegung einer Matrix

Das Gram-Schmidt-Verfahren, angewandt auf die Kolonnen a_1, \dots, a_n einer $m \times n$ -Matrix A liefert die QR-Faktorisierung dieser Matrix. Ergänzt man A durch den m -Vektor y , so liefert das Verfahren (vor dem Normieren) zusätzlich den $\mathcal{R}(A)$ orthogonalen Residuenvektor r gemäss der Formel

$$r = y - Q Q^H y$$

Die Lösung x des Kleinste-Quadrate-Problems erfüllt das durch Rückwärtseinsetzen lösbare System $Rx = Q^H y$.

7.4. Die QR-Zerlegung mit Pivotieren

modifiziertes Gram-Schmidt-Verfahren mit Kolonnen-Pivotieren

$$q_1 := \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad \tilde{q}_i \equiv a_i - q_1 \langle q_1, a_i \rangle$$

wähle $p \geq k$ mit $\|\tilde{q}_p\| \neq 0$ und vertausche Kolonnen p und k ; berechne

$$q_k := \frac{\tilde{q}_k}{\|\tilde{q}_k\|},$$

$$\tilde{q}_i := \tilde{q}_i - q_k \langle q_k, \tilde{q}_i \rangle \quad (i = k + 1, \dots, n);$$

ist $\|\tilde{q}_{k+1}\| = \dots = \|\tilde{q}_n\| = 0$, so gilt $\text{Rang } A = k$ und man ist fertig.

8. Determinanten

8.1. Definition, Eigenschaften

Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Eine Determinante ist ein Funktional ($A \mapsto \det A$) mit den folgenden Eigenschaften:

- \det ist eine lineare Funktion jeder einzelnen Zeile/Kolonne der Matrix

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma a_{l1} + \gamma' a'_{l1} & \dots & \gamma a_{ln} + \gamma' a'_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \gamma \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} + \gamma' \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{l1} & \dots & a'_{ln} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Werden in A zwei Zeilen/Kolonnen vertauscht, so wechselt $\det(A)$ das Vorzeichen

- $\det(I) = 1$

- Hat A eine Zeile/Kolonne aus lauter Nullen, so ist $\det A = 0$

- $\det(\gamma A) = \gamma^n \det A$

- Hat A zwei gleiche Zeilen/Kolonnen, so ist $\det A = 0$

- Addiert man zu einer Zeile/Kolonne von A ein Vielfaches einer anderen Zeile/Kolonne von A , so ändert sich der Wert von $\det A$ nicht.

- Ist A eine Diagonalmatrix, so ist $\det A$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

- Ist A eine Dreiecksmatrix, so ist $\det A$ gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \gamma a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \gamma a_{nn} \end{pmatrix} = \gamma \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Für jede $n \times n$ Matrix A gilt:

$$\det A \neq 0 \Leftrightarrow \text{Rang } A = n \Leftrightarrow A \text{ ist regulär}$$

Wendet man auf A den **Gauss-Algorithmus** an und ist dabei $\text{Rang } A = n$, so ist **$\det A$ gleich dem Produkt der Pivotelemente** multipliziert mit $(-1)^\nu$, wobei ν die Anzahl der ausgeführten Zeilvertauschungen bezeichnet:

$$\det A = (-1)^\nu \prod_{k=1}^n r_{kk}$$

Determinante via Gauss-Algorithmus

Zur Berechnung der Determinante einer $n \times n$ -Matrix A wende man den Gauss-Algorithmus auf A an. Falls er den Rang n und die obere Dreiecksmatrix R liefert, so gilt obere Formel. Ist $\text{Rang } A < n$, so ist $\det A = 0$.

Für irgend zwei $n \times n$ -Matrizen A und B gilt:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Ist A regulär, so gilt:

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

$$\det A^n = (\det A)^n$$

Es gilt:

$$\det A^T = \det A \quad \det A^H = \overline{\det A}$$

8.2. Entwicklung nach Zeilen und Kolonnen

Zu jedem Element a_{kl} einer $n \times n$ -Matrix A werde die $(n-1) \times (n-1)$ -Untermatrix $A_{[k,l]}$ definiert durch Streichen der Zeile k und der Kolonne l von A . Der Kofaktor $\kappa_{k,l}$ von a_{kl} ist dann eine Zahl $\kappa_{k,l} := (-1)^{k+l} \det A_{[k,l]}$

Entwicklung nach der k -ten Zeile (k fest):

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ki} \kappa_{ki}$$

Entwicklung nach der l -ten Kolonne (l fest):

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{il} \kappa_{il}$$

8.3. Determinanten von Blockdreiecksmatrizen

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = \det A \det D \quad \begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = \det A \det D$$

9. Eigenwerte und Eigenvektoren

λ ist genau dann ein Eigenwert von $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$, wenn $A - \lambda I$ singularär ist. ($\det(A - \lambda I) = 0$)

Der Eigenraum E_λ zu einem Eigenwert λ von A ist ein vom Nullraum verschiedener Unterraum des \mathbb{E}^n , und zwar ist

$$E_\lambda = \ker(A - \lambda I),$$

das heisst E_λ besteht aus allen Lösungen v des homogenen Gleichungssystems

$$(A - \lambda I)v = o$$

Die **geometrische Vielfachheit** von λ beträgt

$$\dim E_\lambda = \dim \ker(A - \lambda I) = n - \text{Rang}(A - \lambda I)$$

Das Polynom $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$ heisst **charakteristisches Polynom** der Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$, und die Gleichung $\chi_A(\lambda) = 0$ ist die charakteristische Gleichung.

$\lambda \in \mathbb{E}$ ist genau dann Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$, wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms χ_A ist, das heisst eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist.

Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren via charakteristisches Polynom:

Um die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zu bestimmen, kann man theoretisch wie folgt vorgehen:

- 1 Berechnung des charakteristischen Polynoms χ_A , $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)$
- 2 Berechnung der n Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von χ_A . Die Vielfachheit einer Nullstelle ist gleich der **algebraischen Vielfachheit** dieses Eigenwertes.
- 3 Für jeden versch. Eigenwert λ_k : $A - \lambda_k I$ mit Gauss-Algorithmus auf Zeilenstufenform und wählt von den $n-r$ freien Parametern der Reihe nach immer einen $\neq 0$ und die anderen 0. Die Dimension $n-r$ des Lösungsraumes ist gleich der **geometrischen Vielfachheit** dieses Eigenwertes.

Eine (quadratische) Matrix A ist genau dann singularär, wenn sie 0 als Eigenwert hat.

9.1. Ähnlichkeitstransformationen; die Eigenwertzerlegung

Falls gilt

$$B = T^{-1}AT, \quad A = TBT^{-1}$$

A und B sind ähnlich.

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom; sie haben also die gleiche Determinante, die gleiche Spur und die gleichen Eigenwerte.

Sowohl die geometrische als auch die algebraische Vielfachheit eines Eigenwertes ist bei ähnlichen Matrizen gleich.

Eine zu $F: V \rightarrow V$ gehörende Abbildungsmatrix ist genau dann diagonal, wenn die gewählte Basis von V aus lauter Eigenvektoren von F besteht.

Eine Basis aus Eigenvektoren von F (oder A) heisst Eigenbasis von F (bzw. A).

Gibt es eine Eigenbasis v_1, \dots, v_n so gilt also die einfache Abbildungsformel

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k v_k \mapsto Fx = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k v_k$$

Spektralzerlegung oder Eigenwertzerlegung

Zu einer Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ gibt es genau dann eine ähnliche Diagonalmatrix Λ , wenn es eine Eigenbasis von A gibt. Für die reguläre Matrix

$$V := (v_1 \dots v_n)$$

mit dieser Eigenbasis als Kolonnen gilt dann

$$AV = V\Lambda, \text{ d.h. } A = V\Lambda V^{-1} \text{ bzw. } \Lambda = V^{-1}AV$$

Gibt es umgekehrt eine reguläre Matrix $V \in \mathbb{E}^{n \times n}$ und eine Diagonalmatrix $\Lambda \in \mathbb{E}^{n \times n}$, so dass obiger Satz gilt, so sind die Diagonalelemente von Λ Eigenwerte von A und die Kolonnen von V entsprechende Eigenvektoren, die eine Eigenbasis bilden.

Eine Matrix A , zu der es eine Spektralzerlegung

$A = V\Lambda V^{-1}$ mit diagonalem Λ gibt, heisst diagonalisierbar.

Ist A diagonalisierbar und zerlegen wir die Matrizen V und V^{-1} aus der Spektralzerlegung $A = V\Lambda V^{-1}$ in Kolonnen bzw. Zeilenvektoren,

$$V = (v_1 \dots v_n) \quad V^{-1} = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{pmatrix}$$

so lässt sich A als Summe von n Rang-1-Matrizen darstellen:

$$A = \sum_{k=1}^n v_k \lambda_k w_k^T$$

Dabei gilt $Av_k = v_k \lambda_k$ und $w_k^T A = \lambda_k w_k^T$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Sind die n Eigenwerte von $F : V \rightarrow V$ (wo $n = \dim V$) verschieden, so gibt es eine Basis von Eigenvektoren und die entsprechende Abbildungsmatrix ist diagonal.

Für jeden Eigenwert gilt, dass die geometrische Vielfachheit kleiner gleich der algebraischen Vielfachheit ist.

Eine Matrix ist genau dann **diagonalisierbar**, wenn für jeden Eigenwert die geometrische gleich der algebraischen Vielfachheit ist.

9.2. Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer und Hermitscher Matrizen

Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ symmetrisch (Hermitesch), so gilt:

- i) Alle Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind reell.
- ii) Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind paarweise orthogonal in \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n)
- iii) Es gibt eine orthogonale Basis des \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n) aus Eigenvektoren u_1, \dots, u_n von A .
- iv) Für die orthogonale (unitäre) Matrix $U := (u_1 \dots u_n)$ gilt:
 $U^H A U = \Lambda := \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

10. Anwendungen der Eigenwertzerlegung

10.1. Homogene lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Systeme erster Ordnung

Gegeben sei ein System von homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\dot{y}_1(t) = a_{11}y_1(t) + \dots + a_{1n}y_n(t)$$

\vdots

$$\dot{y}_n(t) = a_{n1}y_1(t) + \dots + a_{nn}y_n(t)$$

mit konstanten Koeffizienten a_{kl}

η_1, \dots, η_n vorgegebene Zahlen für $y_i(0)$

so kann man die Gleichung in Matrixform schreiben:

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0$$

die allgemeine Lösung davon lautet:

$$y(t) = V e^{t\Lambda} c$$

$$e^{t\Lambda} := \text{diag}(e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t})$$

$$c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

mit Anfangsbedingungen: $Vc = y_0 \quad c = V^{-1}y_0$

Systeme höherer Ordnung

$$x^{(n)}(t) - \beta_n x^{(n-1)}(t) - \dots - \beta_2 \dot{x}(t) - \beta_1 x(t)$$

mit den Anfangsbedingungen:

$$x(0) = \eta_1, \quad \dot{x}(0) = \eta_2, \quad \dots, \quad x^{(n-1)}(0) = \eta_n$$

gegeben, so setzen wir

$$y_1(t) := x(t), \quad y_2(t) := \dot{x}(t), \quad \dots, \quad y_n(t) := x^{(n-1)}(t)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$$

Systeme zweiter Ordnung ohne Terme erster Ordnung

$$\ddot{y}_1(t) = a_{11}y_1(t) + \dots + a_{1n}y_n(t)$$

\vdots

$$\ddot{y}_n(t) = a_{n1}y_1(t) + \dots + a_{nn}y_n(t)$$

mit Anfangsbedingungen:

$$y_i(0) = \eta_i, \quad \dot{y}_i(0) = \eta'_i$$

$$\text{also: } \dot{y}(t) = Ay(t), \quad y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = y_1$$

$$\omega_k := \sqrt{-\lambda_k}$$

$$\Omega := \text{diag}(\omega_1, \dots, \omega_n)$$

$$\cos(\Omega t) := \text{diag}(\cos(\omega_1 t), \dots, \cos(\omega_n t))$$

$$\sin(\Omega t) := \text{diag}(\sin(\omega_1 t), \dots, \sin(\omega_n t))$$

die allgemeine Lösung ist dann:

$$y(t) = V(\cos(\Omega t)a + \sin(\Omega t)b)$$

$$Va = y_0, \quad V\tilde{b} = y_1 \quad \text{mit } \tilde{b} := \Omega b$$

10.2. Funktionen von Matrizen

$$f(\Lambda) := \text{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n))$$

$$f(A) := V f(\Lambda) V^{-1}$$

10.3. Quadratische Formen und ihre Hauptachsentransformation

Kegelschnitte:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1: \text{Ellipse mit Halbachsen } a \text{ und } b$$

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1: \text{Hyperbel mit Halbachse } a \text{ und Asymptotensteigung } \pm \arctan(b/a)$$

$$x_1^2 - 2px_2 = 0: \text{Nach oben geöffnete Parabel mit Halbparameter } p$$

Eine auf $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definierte symmetrische bilineare Form B ist eine Funktion der Form

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto B(x, y) := x^T A y \in \mathbb{R},$$

mit einer reellen, symmetrischen $n \times n$ -Matrix A . Die zugehörige auf \mathbb{R}^n definierte quadratische Form Q ist

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto Q(x) := x^T A x \in \mathbb{R},$$

Eine auf $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ definierte Hermitesche Form B ist eine Funktion der Form

$$(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto B(x, y) := x^H A y \in \mathbb{R},$$

mit einer Hermiteschen $n \times n$ -Matrix A .

Hauptachsendarstellung:

$$A = U \Lambda U^T, \quad \tilde{x} := U^T x$$

$$Q(x) = \tilde{Q}(\tilde{x}) := \tilde{x}^T \Lambda \tilde{x} = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tilde{x}_k^2$$

Jede quadratische Form $Q(x) = x^T A x$ lässt sich mittels einer auf der Spektralzerlegung von A beruhenden orthogonalen Basistransformation auf die Hauptachsen-Darstellung bringen.

Jede quadratische Form $Q(x) = x^T A x$ lässt sich durch Übergang auf eine neue orthogonale (aber im allgemeinen nicht orthonormierte) Basis mit Koordinaten y auf die folgende Form bringen:

$$Q(x) = y^T I_{\pm} y = \sum_{k=1}^p y_k^2 - \sum_{l=p+1}^r y_l^2$$

$I_{\pm} := (1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$ Die Zahl p ist dabei gleich der Anzahl positiver Eigenwerte von A , und r ist der Rang von A , d.h. $r-p$ ist die Anzahl negativer Eigenwerte.

Das Tripel $(p, r-p, n-r)$ mit der Zahl der positiven, negativen und null Eigenwerte von A heisst Trägheit von A . Die Differenz $p-(r-p)$ der Zahl positiver und negativer Eigenwerte heisst Signatur von A .

Zwei $n \times n$ -Matrizen A und B heissen kongruent, wenn es eine reguläre Matrix S gibt, so dass

$$A = S B S^T$$

Der Übergang von $B \mapsto A = S B S^T$ (oder umgekehrt) heisst dann Kongruenztransformation.

Trägheitssatz:

Zu jeder reellen symmetrischen Matrix A gibt es eine kongruente Matrix I_{\pm} . Dabei ist das Tripel $(p, r-p, n-r)$ gleich der Trägheit von A , die unabhängig ist von der zugrunde liegenden Kongruenztransformation.

Eine symmetrische Matrix ist genau dann positiv definit, wenn all ihre Eigenwerte positiv sind.

10.4. Die Spektralnorm

Die Spektralnorm einer Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ ist gleich der Wurzel aus dem grössten Eigenwert von $A^H A$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{max}}$$

Die Spektralnorm einer Hermiteschen/symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ ist gleich dem Betrag des grössten Eigenwerts dieser Matrix

$$\|A\|_2 = \lambda_{max}$$

Die Spektralnorm der Inversen A^{-1} einer Matrix ist gleich dem Inversen der Wurzel aus dem kleinsten Eigenwert von $A^H A$

$$\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{min}}}$$

Ist A Hermitesch/symmetrisch, so ist $\|A^{-1}\|_2$ gleich dem Inversen des Betrages des kleinsten Eigenwertes von A

$$\|A^{-1}\|_2 = \lambda_{min}$$

Die Konditionszahl einer Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ ist gegeben durch $\kappa_2(A) = \frac{\sqrt{\lambda_{max} \text{ von } A^H A}}{\sqrt{\lambda_{min} \text{ von } A^H A}}$.

Ist A Hermitesch(symmetrisch), so vereinfacht sich diese Formel zu $\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max} \text{ von } A}{\lambda_{min} \text{ von } A}$.

11. Die Singulärwertzerlegung

11.1. Herleitung

Zu einer komplexen $m \times n$ Matrix A vom Rang r existieren unitäre Matrizen $U = (u_1 \dots u_m)$ und $V = (v_1 \dots v_n)$ sowie eine $m \times n$ Matrix Σ der Form

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \Sigma_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mit einem diagonalen $r \times r$ Block

$$\Sigma_r := \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_r\},$$

dessen Diagonalelemente positive und alle grösser gleich geordnet sind, so dass gilt:

$$A = U \Sigma V^H = \sum_{k=1}^r u_k \sigma_k v_k^H$$

Dabei bilden die Kolonnen von U und V orthonormale Eigenbasen von $A A^H$ bzw. $A^H A$:

$$A A^H = U \Sigma_m^2 U^H, \quad A^H A = V \Sigma_n^2 V^H$$

mit $\Sigma_m := \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_m\}$, $\Sigma_n := \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, wo $\sigma_k = 0$, falls $k > r$.

- $A^T A$ und $A A^T$ bilden

$$- \Sigma_n = \text{diag}(\sqrt{\text{Eigenw. von } A^T A})$$

- $\Sigma_m = \text{diag}(\sqrt{\text{Eigenw. von } AA^T})$
- $V = \text{Eigenvektoren } A^T A$
- $U = \text{Eigenvektoren } AA^T$ - Σ hat die gleiche Form wie A
- $SVD = A = U\Sigma V$

11.2. Folgerungen

Die Matrix $A \in \mathbb{E}^{n \times n}$ habe eine Singulärwertzerlegung mit $m=n$, und für $p = 1, \dots, r$ sei

$$A_p = \sum_{k=1}^p u_k \omega_k v_k^H$$

Dann ist A_p im Sinne der Spektralnorm die beste Approximation von A durch eine Matrix vom Rang p , das heisst es gilt

$$\|A - A_p\|_2 = \min \|A - B\|_2$$

wenn über alle Matrizen $B \in \mathbb{E}^{n \times n}$ vom Rang p minimiert wird. Dabei ist

$$\|A - A_p\|_2 = \omega_{p+1}$$

A. Mengen

$A \cup B$ Vereinigung

$A \cap B$ Durchschnitt

$A \setminus B$ Differenzmenge $\{x \in A \wedge x \notin B\}$